

Вопросы 3-Е математика по функциональному анализу

Теоретические вопросы

- 1) Понятие множество. Подмножество. Равные множества. Объединением множеств. Пересечением множеств. Разность множеств. Симметрическая разность. Прямое (декартово) произведение множеств.
- 2) Отображения множеств. Образ и прообраз множества. Типы отображения сюръекции, инъекции, биекции. Эквивалентные множества. Счетные множества. Несчетное множество
- 3) Метрика. Метрические пространства. Основные примеры.
- 4) Последовательности точек метрических пространств. Сходимость, свойства сходящихся последовательностей.
- 5) Операция замыкания. Замкнутые множества. Свойства замкнутых множеств. Открытые множества. Связь между открытыми и замкнутыми множествами .
- 6) Полнота метрических пространств. Примеры полных и неполных пространств. Характеризация полных пространств. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра.
- 7) Принцип сжимающих отображений. Неподвижной точка. Примеры.
- 8) Непрерывная отображение метрических пространств. Непрерывность. Изометрия. Гомеоморфизм. Примеры.
- 9) Кольцо множества. Алгебра множества. σ –кольцо множества. σ –алгебра множества. Полукольцо множества
- 10) Компактные метрические пространства. Связанность в метрических пространствах. Теорема Арцела для пространства $C(K)$ (K компакт). Непрерывные отображения метрических пространств.
- 11) Предельный переход в классе измеримых функций. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере(Теорема Лебега, Теорема Рисса)
- 12) Определение и простейшие свойства измеримых функций. Характеристической функцией множества. Некоторые классы измеримых функций. Арифметические действия над измеримыми функциями
- 13) Элементарные множества на плоскости и их мера. Мера Лебега множества.

№1. Пусть A, B, C и D – произвольные множества. Доказать следующие равенства

1.1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

1.2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

$$1.3. A \cap B = A \setminus (A \setminus B).$$

$$1.4. A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

$$1.5. (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C).$$

$$1.6. (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

$$1.7. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$1.8. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

$$1.9. (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

$$1.10. (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

$$1.11. (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

$$1.12. A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$$1.13. A \Delta (A \Delta B) = B.$$

$$1.14. (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

№2. Пусть даны множества A, B и C . Выразить следующие множества через A, B и C при помощи операций $\cup, \cap, \setminus$ и Δ .

1. Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.
2. Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств A, B и C .
3. Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств A, B и C .
4. Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B и C .
5. Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B и C .
6. Множество элементов, принадлежащих A, B , но не принадлежащих C .
7. Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B , но не принадлежащих C .
8. Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A, B , но не принадлежащих C .

№3. Отображение $f : R \rightarrow R$. Найти 1) образ $f(A)$ множества A ;

2) прообраз $f^{-1}(B)$ множества B .

$$1). f(x) = x^2 \text{ и } A = [-1; 3], B = [0; 9].$$

$$2). f(x) = x^2 \text{ и } A = [1; 3], B = [-2; 4].$$

$$3). f(x) = x^2 \text{ и } A = [-3; -1], B = [-4; -1].$$

$$4). f(x) = x^2 \text{ и } A = [-2; 2], B = [4; 9].$$

$$5). f(x) = \sqrt{x} \text{ и } A = [-3; -1], B = [-4; 0].$$

$$6). f(x) = x \text{ и } A = [-2; 2], B = [4; 9].$$

$$7). f(x) = 2x \text{ и } A = [-2; 2], B = [-4; 6].$$

$$8). f(x) = x^3 \text{ и } A = [-1; 2], B = [-1; 27].$$

$$9). f(x) = \sqrt{x} \text{ и } A = [-1; 4], B = [-1; 3].$$

$$10). f(x) = \sqrt{x} \text{ и } A = [4; 25], B = [-3; 3].$$

№4.Отображение: $f : R \rightarrow R$ определяется формулой. Определите типы сюръекции, инъекции, биекции ...

- a) $f(x) = 2^x, f : R \rightarrow R$; б) $f(x) = x^3 - 3x, f : R \rightarrow R$ в) $f(x) = x^3, f : R \rightarrow R$
- д) $f(x) = x^3 - x, f : R \rightarrow R$; е) $f(x) = x, f : R \rightarrow R$; ф) $f(x) = x^2 - 1, f : R \rightarrow R$;
- г) $f(x) = x^2 + 3, f : R \rightarrow R$; х) $f(x) = |x|, f : R \rightarrow R$; и) $f(x) = x - |x|,$
 $f : R \rightarrow (-\infty; 0]$; j) $f(x) = x^2, f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$; к) $f(x) = x^2, f : R \rightarrow [0; +\infty)$;
- л) $f(x) = x^2, f : R \rightarrow R$; м) $f(x) = x^2, f : [0; +\infty) \rightarrow R$;
- н) $f(x) = \sin x, f : R \rightarrow [-1; 1]$; п) $f(x) = \sin x, f : [-0,5\pi; 0,5\pi] \rightarrow [-1; 1]$;
- q) $f(x) = \sin x, f : R \rightarrow R$.

№5. Являются ли метриками в R следующие функции:

- а) $\rho(x, y) = x^3 - y^3$; б) $\rho(x, y) = |\sin(x - y)|$; в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$;
- г) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$; д) $\rho(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$; е) $\rho(x, y) = (x^2 + 2y^2) |x - y|$;
- ф) $\rho(x, y) = |x^4 - y^4|$; ж) $\rho(x, y) = \arctg |x - y|$; к) $\rho(x, y) = ||x| - |y||$;
- л) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$; м) $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$ н) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

№6. Найти расстояния между числовыми векторами x и y в пространстве R^n с тремя разными метриками $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$. В какой метрике расстояние наибольшее, в какой наименьшее?

- $n = 3, x = \left(\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{4}\right), y = \left(-\frac{\pi}{3}, \pi, \pi\right)$
- $n = 5, x = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 0, 2\right), y = \left(0, 0, 2, -\frac{2}{3}, 2\right)$
- $n = 4, x = (3, -2, \pi, 1), y = (5, -1, 2\pi, 0)$
- $n = 5, x = (3, 3, -1, 0, 2), y = (0, 5, 4, -5, -2)$
- $n = 3, x = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right), y = \left(-3, -2, -\frac{4}{5}\right)$
- $n = 6, x = (-1, -1, 3, 4, 2, 1), y = (2, -1, 0, 0, 1, 2)$
- $n = 4, x = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0, 0), y = (-2, 1, \sqrt{2}, 0)$
- $n = 3, x = (\sqrt{10}, \sqrt{2}, 2), y = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{8})$

$$\begin{array}{ll}
9. n=6, & x=(1,-1,2,0,0,1), \quad y=(-2,1,1,0,2,3) \\
10. n=3, & x=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{5}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right), \quad y=\left(-1, \frac{2}{5}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
11. n=7, & x=(1,3,-1,5,0,1,1), \quad y=(2,3,1,0,4,2,1) \\
12. n=6, & x=(1,-1,2,0,0,1), \quad y=(-2,1,1,0,2,3) \\
13. n=4, & x=(1,-1,2,1), \quad y=\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \\
14. n=3, & x=\left(-1, \frac{\sqrt{5}}{4}, 1\right), \quad y=\left(-2, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right).
\end{array}$$

№7. Пусть $X = N \cdot K$ – кольцо, состоящее из конечных подмножеств N . Задаёт ли данная формула меру на K ?

$$\begin{array}{llll}
1) m(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n}; & 2) m(A) = \min_{n \in A} n; & 3) m(A) = \max_{n \in A} n; & 4) m(A) = \sum_{n \in A} e^{-n}; \\
5) m(A) = \sum_{n \in A} (n^2 - n + 1); & 6) m(A) = \sum_{n \in A} (n^2 - 6n + 3); & 7) m(A) = \sum_{n \in A} (n^2 - 12n + 35);
\end{array}$$

№8. Вычислите меры Лебега следующих множеств.

$$\begin{array}{llll}
1. A_1 = (0, 2); & 2. A_2 = [2, 5]; & 3. A_3 = [1, 3] \cup [5, 6]; & 4. A_4 = (2, 4) \setminus ([1, 3] \cup [5, 6]); \\
5. A_5 = ((2, 4) \setminus [1, 3]) \cup [5, 6]; & 6. A_6 = [1, 4] \Delta [2, 6]; & 7. A_7 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right); \\
8. A_8 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{k} \right); & 9. A_9 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k} \right); & 10. A_{10} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right); \\
11. A_{11} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (k^2, k^2 + 2^{-k}); & 12. A_{12} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (k^3, k^3 + 3^{-k}); & 13. A_{13} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k, k + \frac{1}{k!} \right); \\
14. A_{14} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k, k + \frac{2}{k(k+1)} \right); & 15) A_{15} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k, k + \frac{3}{k(k+1)} \right); & 16) A_{16} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(k - 2^{-k}, k + \frac{1}{k!} \right); \\
17) A_{17} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(2k - 2^{-k}, 2k + \frac{1}{k!} \right); & 18) A_{18} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^k}, \frac{1}{3^{k-1}} \right); & 19) A_{19} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k} \right); \\
20) A_{20} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [e^{-2k}, e^{-2k+1}].
\end{array}$$